集合値写像の零点問題と関連する不動点定理 (函数解析学による一般化エントロピーの新展開)

高阪, 史明

数理解析研究所講究録
第1852巻2013年25-32

集合値写像の零点問題と関連する不動点定理
(Fixed point theorems related to zero point problems for set valued mappings)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)*
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University

概要

バナッハ空間における二つの不動点定理を紹介する. さらに, これらの不動点定理を用いて, 集合値写像の零点の存在定理を証明する.

1 はじめに

本稿では, 極大単調作用素と m-増大作用素の零点問題と関連する二つの不動点定理を紹介する. さらに, これらの不動点定理を用いて, 極大単調作用素と m-増大作用素の零点の存在定理を証明する.

極大単調作用素や m-増大作用素の零点を求める問題は, 凸関数の最小点を求める問題, 変分不等式問題, 二変数関数の鞍点を求める問題, 二変数関数の均衡点を求める問題などの非線形問題と関係する (*cf.* [13–15]).

X を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とする. このとき, 極大単調作用素 $A\colon X \to 2^{X^*}$ について

$$Az \ni 0 \tag{1.1}$$

を満たす点 $z \in X$ を A の零点と言い, A の零点全体の集合を $A^{-1}(0)$ で表す. 同様に, m-増大作用素 $B\colon X \to 2^X$ について

$$Bz \ni 0 \tag{1.2}$$

* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@oita-u.ac.jp

を満たす点 $z \in X$ を B の零点と言い, B の零点全体の集合を $B^{-1}(0)$ で表す. 集合値写像の零点を求める問題を零点問題と言う. X がヒルベルト空間であれば, 極大単調性とm-増大性は同値である (*cf.* [15]).

極大単調作用素 $A\colon X \to 2^{X^*}$ と m-増大作用素 $B\colon X \to 2^X$ について,

$$\begin{aligned} S(x) &= (J+A)^{-1}Jx \quad (\forall x \in X) \\ T(x) &= (I+B)^{-1}x \quad (\forall x \in X) \end{aligned} \tag{1.3}$$

により定義される一価写像 $S, T\colon X \to X$ それぞれ A と B のリゾルベントとよばれる. ここで, J は X から X^* への双対写像であり, I は X 上の恒等写像である.

これらの写像 S, T は, 零点問題を不動点問題の立場から解明する際に有用である. 実際, S の不動点集合 $\mathrm{F}(S)$ は $A^{-1}(0)$ と一致し, T の不動点集合 $\mathrm{F}(T)$ は $B^{-1}(0)$ と一致する. また, よく知られているように, T は nonexpansive 写像である. つまり,

$$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\| \quad (\forall x, y \in X) \tag{1.4}$$

が成り立つ. しかし, S は一般に nonexpansive 写像とは限らない. 特に, X がヒルベルト空間であれば, これらの写像 S, T は一致する.

文献 [11] と文献 [3] では, (1.3) で定義される写像 S と T が, それぞれ

$$\phi(Sx, Sy) + \phi(Sy, Sx) \le \phi(Sx, y) + \phi(Sy, x) \quad (\forall x, y \in X) \tag{1.5}$$

$$2\|Tx - Ty\|^2 \le \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2 \quad (\forall x, y \in X) \tag{1.6}$$

を満たすことに着目し, これらの性質を用いて, S や T に関する不動点定理を得た.

以下においては, 文献 [3, 11] において得られた不動点定理を紹介するとともに, 零点問題への応用を議論する.

2 準備

本稿で取り扱う線形空間は全て実線形空間である. 正の整数全体の集合と実数全体の集合を, それぞれ $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ で表す. X をバナッハ空間とし, X の双対空間を X^* とする. X や X^* のノルムを $\|\cdot\|$ で表す. また, $x^* \in X^*$ と $x \in X$ について, $x^*(x)$ を $\langle x, x^* \rangle$ で表すこともある. X から X^* への双対写像 J は,

$$Jx = \left\{ x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\} \quad (\forall x \in X) \tag{2.1}$$

で定義される X から X^* への集合値写像である.

X が滑らかであるとは, 任意の $x \in X$ について Jx が一点集合であることを言う. このとき, J を X から X^* への一価写像とみなす. X がヒルベルト空間ならば, J は X 上の恒等写像となる. また, X が狭義凸であるとは,

$$x, y \in X,\ x \neq y,\ \|x\| = \|y\| = 1 \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 \tag{2.2}$$

が成り立つことを言う. X が回帰的であることは, $J(X) = X^*$ と同値である. X が滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間であるとき, $J\colon X \to X^*$ は全単射となる. また, X が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon \in (0, 2]$ について, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$x, y \in X,\ \|x - y\| \geq \varepsilon,\ \|x\| = \|y\| = 1 \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \tag{2.3}$$

が成り立つことを言う. 一様凸バナッハ空間は狭義凸かつ回帰的である. また, ヒルベルト空間や p 乗ルベーグ可積分な関数全体の空間 L^p $(1 < p < \infty)$ は一様凸で (一様に) 滑らかなバナッハ空間である.

X を滑らかなバナッハ空間とするとき,

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2 \quad (\forall x, y \in X) \tag{2.4}$$

により二変数関数 $\phi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を定義する [1,9]. $x, y, z \in X$ とするとき, 次が成り立つ.

- $\phi(x, y) \geq 0$;
- X が狭義凸であれば, $\phi(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
- $\phi(x, y) = \phi(x, z) + \phi(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy \rangle$.

バナッハ空間 X の空でない部分集合 C と $T\colon C \to X$ について, $\mathrm{F}(T)$ で T の不動点全体の集合 $\{z \in C : Tz = z\}$ を表す. X を滑らかとするとき, T が nonspreading [11] であるとは

$$\phi(Tx, Ty) + \phi(Ty, Tx) \leq \phi(Tx, y) + \phi(Ty, x) \quad (\forall x, y \in C) \tag{2.5}$$

が成り立つことを言う. また, T が 1/2-nonexpansive [3] であるとは,

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2 \quad (\forall x, y \in C) \tag{2.6}$$

が成り立つことを言う. X がヒルベルト空間であれば, $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$ $(\forall x, y \in X)$ となり, T が nonspreading であることと, T が 1/2-nonexpansive であることは同値であ

る. また, X が滑らかであるとき, T が firmly nonexpansive type [10] であるとは,

$$\langle Tx - Ty, JTx - JTy\rangle \leq \langle Tx - Ty, Jx - Jy\rangle \quad (\forall x, y \in C) \tag{2.7}$$

が成り立つことを言う. さらに, T が firmly nonexpansive [6] であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|\lambda(x - y) + (1 - \lambda)(Tx - Ty)\| \quad (\forall \lambda > 0,\ x, y \in C) \tag{2.8}$$

が成り立つことを言う. よく知られているように, $u, v \in X$ について, 次は同値である (*cf.* [13,14]).

- 任意の $\lambda > 0$ について, $\|u\| \leq \|u + \lambda v\|$ が成り立つ.
- ある $j \in Ju$ が存在して, $\langle v, j\rangle \geq 0$ が成り立つ.

したがって, T が firmly nonexpansive であることは, 任意の $x, y \in C$ について, ある $j \in J(Tx - Ty)$ が存在して, $\langle x - Tx - (y - Ty), j\rangle \geq 0$ が成り立つことと同値である.

次の基本的な性質は大切である.

- 全ての firmly nonexpansive type 写像は nonspreading 写像である [11].
- 全ての firmly nonexpansive 写像は nonexpansive 写像 [6,7] であり, さらに, 1/2-nonexpansive 写像でもある [3].
- ヒルベルト空間において, T が firmly nonexpansive type であることは, T が firmly nonexpansive であることと同値である.

X をバナッハ空間とする. このとき, $A\colon X \to 2^{X^*}$ が単調作用素であるとは,

$$x^* \in Ax,\ y^* \in Ay \Longrightarrow \langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq 0 \tag{2.9}$$

が成り立つことを言う. また, 単調作用素 $A\colon X \to 2^{X^*}$ が極大であるとは, 単調作用素 $A_0\colon X \to 2^{X^*}$ でそのグラフ $\mathrm{G}(A_0)$ が A のグラフ $\mathrm{G}(A)$ を真に含むものが存在しないことを言う. ここで, $\mathrm{G}(A) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : x^* \in Ax\}$ である. また, A の定義域を $\mathrm{D}(A)$ で表す. つまり, $\mathrm{D}(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$ である.

一方, $A\colon X \to 2^X$ が増大作用素であるとは,

$$y_1 \in Ax_1,\ y_2 \in Ax_2 \Longrightarrow \exists j \in J(x_1 - x_2) \quad \text{s.t.} \quad \langle y_1 - y_2, j\rangle \geq 0 \tag{2.10}$$

が成り立つことを言う. 増大作用素 A が m-増大であるとは, $I + A$ の値域 $\mathrm{R}(I + A)$ が X と一致することを言う. ここで, I は X 上の恒等写像とし, $\mathrm{R}(I + A) = \bigcup_{x \in X}(I + A)x$ とする. また, A の定義域を $\mathrm{D}(A)$ で表す. つまり, $\mathrm{D}(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$ である.

次も基本的な性質である.

- X を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^{X^*}$ を極大単調作用素とするとき, $(J+A)^{-1}J$ は X から $\mathrm{D}(A)$ の上への firmly nonexpansive type 写像であり, $\mathrm{F}\left((J+A)^{-1}J\right) = A^{-1}(0)$ が成り立つ [10].
- X をバナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^{X}$ を m-増大作用素とするとき, $(I+A)^{-1}$ は X から $\mathrm{D}(A)$ の上への firmly nonexpansive 写像であり, $\mathrm{F}\left((I+A)^{-1}\right) = A^{-1}(0)$ が成り立つ [7, 13, 14].

補足 2.1. バナッハ空間の幾何学については, 例えば文献 [8, 13] を, 非線形関数解析学や凸解析学については, 例えば文献 [4, 13–16] を参照すると良い.

3 バナッハ空間における二つの不動点定理

本節では, バナッハ空間における nonspreading 写像と 1/2-nonexpansive 写像に対し, 次の不動点定理と同様の結果が得られることを紹介する.

定理 3.1 ([12]). C をヒルベルト空間 X の空でない閉凸集合とし, $T\colon C \to C$ を nonexpansive 写像とする. このとき, $\{T^n x\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在するならば, T は不動点を持つ.

補足 3.2. 定理 3.1 は X が一様凸バナッハ空間の場合でも成り立つ (*cf.* [13]). また, 文献 [5] では, X が一様凸バナッハ空間で C が特に有界の場合に, T が不動点を持つことが示された.

次は, nonspreading 写像に対する不動点定理である.

定理 3.3 ([11]). C を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間 X の空でない閉凸集合とし, $T\colon C \to C$ を nonspreading 写像とする. このとき, $\{T^n x\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在するならば, T は不動点を持つ.

補足 3.4. 定理 3.3 の証明においては,

$$z_n = \frac{1}{n}\left(Tx + T^2x + \cdots + T^n x\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.1}$$

により定義される C の有界点列 $\{z_n\}$ の弱収束部分列の極限が T の不動点であることを示した.

次は, 1/2-nonexpansive 写像に対する不動点定理である.

定理 3.5 ([3]). C を一様凸バナッハ空間 X の空でない閉凸集合とし, $T\colon C \to C$ を 1/2-nonexpansive 写像とする. このとき, $\{T^n x\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在するならば, T は不動点を持つ.

補足 3.6. 定理 3.5 の証明においては, バナッハ極限 μ を用いて

$$g(y) = \mu\Big(\big(\|y - Tx\|^2, \|y - T^2x\|^2, \|y - T^3x\|^2, \dots\big)\Big) \quad (\forall y \in C) \tag{3.2}$$

により定義される連続凸関数 $g\colon C \to \mathbb{R}$ の一意の最小点が T の不動点であることを示した.

補足 3.7. 文献 [3] においては, より一般的な α-nonexpansive 写像 $(\alpha < 1)$ に対する不動点定理が得られた.

定理 3.3 と定理 3.5 は, 次のヒルベルト空間における不動点定理の一般化である.

定理 3.8 ([2,11]). C をヒルベルト空間 X の空でない閉凸集合とし, $T\colon C \to C$ は

$$2\|Tx - Ty\|^2 \le \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2 \quad (\forall x, y \in C) \tag{3.3}$$

を満たすとする. このとき, $\{T^n x\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在するならば, T は不動点を持つ.

補足 3.9. 文献 [2] においては, より一般的な λ-hybrid 写像 $(\lambda \in \mathbb{R})$ に対する不動点定理が得られた.

4 零点問題への応用

本節では, 定理 3.3 と定理 3.5 をそれぞれ用いることにより, 極大単調作用素と m-増大作用素の零点の存在定理を得る.

定理 4.1. X を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^{X^*}$ を極大単調作用素とする. このとき, $\mathrm{D}(A)$ が有界であるならば, A は零点を持つ.

証明. 写像 T を

$$Tx = (J + A)^{-1}Jx \quad (\forall x \in X) \tag{4.1}$$

により定義する. このとき, T は X から $\mathrm{D}(A)$ の上への firmly nonexpansive type 写像であり, $\mathrm{F}(T) = A^{-1}(0)$ が成り立つ [10]. よって, T は nonspreading 写像でもある [11].

$T(X) = \mathrm{D}(A)$ より, 任意の $x \in X$ について $\{T^n x\}$ は有界である. 定理 3.3 より, $\mathrm{F}(T)$ は空でない. したがって, $A^{-1}(0)$ も空でない. □

定理 4.2. X を一様凸バナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^X$ を m-増大作用素とする. このとき, $\mathrm{D}(A)$ が有界であるならば, A は零点を持つ.

証明. 写像 T を

$$Tx = (I + A)^{-1}x \quad (\forall x \in X) \tag{4.2}$$

により定義する. このとき, T は X から $\mathrm{D}(A)$ の上への firmly nonexpansive 写像であり, $\mathrm{F}(T) = A^{-1}(0)$ が成り立つ [7, 13, 14]. よって, T は 1/2-nonexpansive 写像でもある [3]. $T(X) = \mathrm{D}(A)$ より, 任意の $x \in X$ について $\{T^n x\}$ は有界である. 定理 3.5 より, $\mathrm{F}(T)$ は空でない. したがって, $A^{-1}(0)$ も空でない. □

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[3] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Fixed point theorem for α-nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 4387–4391.

[4] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York, 2011.

[5] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

[6] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[7] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[8] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[9] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[10] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[11] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[12] A. Pazy, *Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space*, Israel J. Math. **9** (1971), 235–240.

[13] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[14] ———, *Convex analysis & approximation of fixed points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).
[15] ———, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
[16] C. Zălinescu, *Convex analysis in general vector spaces*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.